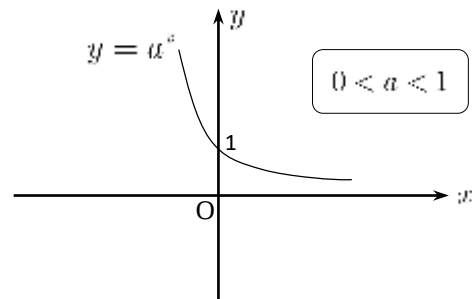
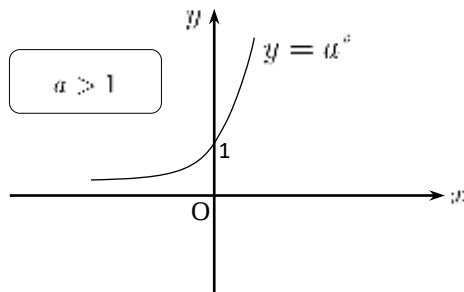


BÀI 4. HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT

I – LÝ THUYẾT

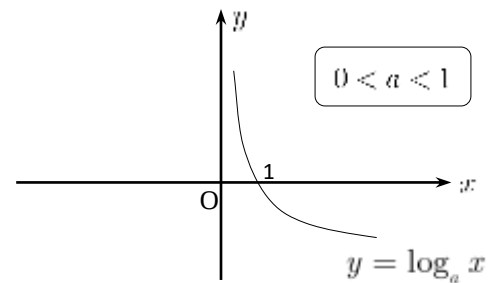
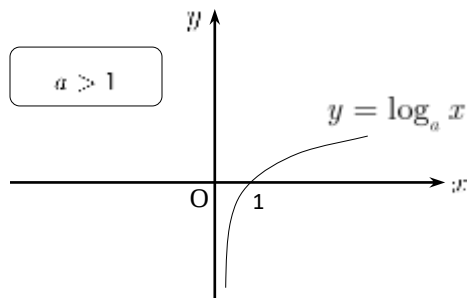
1. Hàm số mũ: $y = a^x, (a > 0, a \neq 1)$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Tập giá trị: $T = (0, +\infty)$
- Tính đơn điệu
Khi $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến $\mathbb{R}$.
- Dạng đồ thị: Nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.



2. Hàm số logarit: $y = \log_a x, (a > 0, a \neq 1)$

- Tập xác định: $D = (0, +\infty)$
- Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$
- Tính đơn điệu
Khi $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$. Khi $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến $(0; +\infty)$.
- Dạng đồ thị: Nhận trục tung làm tiệm cận đứng.



3. Đạo hàm

Đạo hàm hàm số sơ cấp	Đạo hàm hàm số hợp
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$\Rightarrow (a^u)' = a^u \cdot \ln u \cdot u'$
$(e^x)' = e^x$	$\Rightarrow (e^u)' = e^u \cdot u'$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$\Rightarrow (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}, (x > 0)$	$\Rightarrow (\ln u)' = \frac{u'}{u}$

II – DẠNG TOÁN

1. Dạng 1: Tập xác định của hàm số.

Phương pháp giải:

- **Tự luận B1:** Nêu điều kiện của hàm số
- B2:** Giải điều kiện
- B3:** Kết luận tập xác định của hàm số.
- **Casio:** Áp dụng cho các hàm số trong đó không chứa hàm số lũy thừa
 - + Nhập hàm số cần tìm tập xác định
 - + CALC: $x = a$ Nếu Casio báo Math ERROR thì loại bỏ các đáp án chứa giá trị a .

Ví dụ 1: Tập xác định của hàm số $f(x) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+1} - \log_{\frac{1}{2}} (3-x) - \log_3 (x-1)^3$

là:

- A. $D = (1; 3)$. B. $D = (-1; 1)$. C. $D = (-\infty; 3)$. D. $D = (1; +\infty)$.

Giải: Chọn A.

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+1 > 0 \\ 3-x > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x < 3 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 3 \Rightarrow D = (1; 3).$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (1; 3)$

Casio: Nhập hàm số CALC $x = 0$ Casio báo Math ERROR thì loại bỏ các đáp án B và C

$x = 4$ Casio báo Math ERROR thì loại bỏ các đáp án D

Ví dụ 2: Tập xác định của hàm số $f(x) = x^\pi + \ln \frac{e^{2x} + 4e^x + 5}{1-x}$

- A. $D = (-3; e)$. B. $D = (0; 1)$. C. $D = (-\infty; 1)$. D. $D = (0; +\infty)$.

Giải: Chọn B.

Điều kiện:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{e^{2x} + 4e^x + 5}{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 (e^{2x} + 4e^x + 5 > 0, \forall x) \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1 \Rightarrow D = (0; 1).$$

trắc nghiệm: Hàm số chứa $x^\pi \Rightarrow x > 0$ loại đáp án A, C. Thay $x = 3$ ta có $\frac{e^6 + 4e^3 + 5}{1-3} < 0$, ta loại đáp án D.

Ví dụ 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số

$$y = \frac{1}{\sqrt{\log_3(x^2 - 2x + 3m)}} \text{ có tập xác định là } \mathbb{R}.$$

A. $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **B.** $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$. **D.** $\left(\infty; \frac{2}{3}\right]$.

Giải: Chọn A.

$$\text{Hàm số có tập xác định } \mathbb{R} \text{ tương đương } \begin{cases} x^2 - 2x + 3m > 0 \\ \log_3(x^2 - 2x + 3m) > 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 3m > 0 \\ x^2 - 2x + 3m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 3m > 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3m > 1 - x^2 + 2x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3m > \max_{\mathbb{R}} \{1 - x^2 + 2x\}$$

Xét hàm số $f(x) = 1 - x^2 + 2x$, dùng đạo hàm ta có $\max_{\mathbb{R}} f(x) = 2$.

$$\text{Suy ra } 3m > 2 \Leftrightarrow m > \frac{2}{3}.$$

2. Dạng 2: Tính đạo hàm các cấp của hàm số mũ và hàm số logarit; Tìm min, max của hàm số mũ và hàm số logarit

a) Phương pháp giải:

- * Đối với bài toán tính đạo hàm hoặc chứng minh đẳng thức chứa đạo hàm
 - Dùng các công thức tính đạo hàm đã học
 - Thay vào các đẳng thức chứa đạo hàm ta thu được kết quả
- * Đối với bài toán tìm min, max
 - Tìm đạo hàm của hàm số
 - Tìm các nghiệm thuộc khoảng đang xét
 - Tính giá trị của hàm số tại các điểm đầu mút và các điểm vừa tìm được
 - Kết luận

Ví dụ 1: Đạo hàm của hàm số $y = \log_8(x^2 - 3x + 8)$ là.

A. $y' = (2x - 3) \cdot \log_8(x^2 - 3x + 8)$. **B.** $y' = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 8}$.

C. $y' = \frac{2x-3}{(x^2-3x+8)\ln 8}.$

D. $y' = \frac{2x-3}{x^2-3x+8} \ln 8.$

Giải:

Chọn C

Ta có $y' = \frac{(x^2-3x+8)'}{(x^2-3x+8).\ln 8} = \frac{2x-3}{(x^2-3x+8).\ln 8}$

Ví dụ 2: Cho $f(x) = 2^{\frac{x-1}{x+1}}$. Giá trị $f'(0)$ bằng.

A. $\frac{1}{2}.$

B. $2 \ln 2.$

C. $2.$

D. $\ln 2.$

Giải

Chọn D.

Cách 1. Sử dụng công thức tính đạo hàm.

$$f'(x) = 2^{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{2}{(x+1)^2} \cdot 2^{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \ln 2 \Rightarrow f'(0) = 2 \cdot 2^{-1} \cdot \ln 2 = \ln 2$$

Cách 2. Sử dụng máy tính.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \ln \frac{1}{x+1}$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. $xy' - 1 = -e^y$

B. $xy' - 1 = e^y$

C. $xy' + 1 = e^y$

D. $xy' + 1 = -e^y$

Giải Chọn C

Ta có $y' = \left(\frac{1}{x+1}\right)' \cdot \frac{1}{\frac{1}{x+1}} = -\frac{1}{(x+1)^2} (x+1) = -\frac{1}{x+1}$

Vậy $xy' + 1 = -\frac{x}{x+1} + 1 = \frac{1}{x+1}$ và $e^y = e^{\ln \frac{1}{x+1}} = \frac{1}{x+1} \Rightarrow xy' + 1 = e^y$

Ví dụ 4 : Đạo hàm của hàm số $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ là

A. $y' = \frac{1+x}{x + \sqrt{x^2 + 1}}.$

B. $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

C. $y' = \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

D. $y' = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

Giải : Chọn B

$$\text{Ta có } y' = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Ví dụ 5 : Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - \ln(x+1)$ trên $[0, 2]$ là

A. 0. **B.** $1 - \ln 2$. **C.** $2 - \ln 3$. **D.** Đáp án khác.

Giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = 1 - \frac{1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$y(0) = 0; y(2) = \ln 3$$

$$\text{Vậy } \min_{[0;2]} y = 0$$

Ví dụ 6: Gọi M, N lần lượt là giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4})$ trên đoạn $[0; \sqrt{5}]$. Khi đó tổng $M + N$ là

A. $\ln(6 + 3\sqrt{5})$ **B.** $\ln \frac{8}{3 - \sqrt{5}}$ **C.** $\ln(6 - 2\sqrt{5})$ **D.** Kết quả khác

Giải : Chọn B

$$\text{Ta có : } y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} ; y' = 0 \text{ vô nghiệm}$$

$$\text{Mà } y(0) = \ln 2; y(\sqrt{5}) = \ln(3 + \sqrt{5}) \Rightarrow M + N = \ln(2) + \ln(3 + \sqrt{5}) = \ln \frac{8}{3 - \sqrt{5}}$$

3. Dạng 3: Sự biến thiên của hàm số mũ, logarit

Phương pháp giải

- **Tự luận**

+ Nếu là hàm số dạng $y = a^x; y = \log_a x$ thì dựa vào cơ số a để xác định tính đơn điệu hàm số.

+ Nếu là các hàm số khác ta xét sự biến thiên của hàm số theo các bước:
TXĐ $\Rightarrow$ BBT $\Rightarrow$ Kết luận

- Casio:

+ Dùng MODE 7 để khảo sát tính tăng giảm, giảm của hàm số để chọn được đáp án.

Ví dụ 1: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ **B.** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **C.** $y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$ **D.** $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$

Giải

Chọn A

Sử dụng tính chất: Hàm số $y = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $a > 1$

Ví dụ 2: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y = \log x$ **B.** $y = \sqrt{x^2 + 1}$ **C.** $y = \log_{\frac{2}{3}} x$ **D.**

$y = \ln(x^2 + 1)$

Giải

Chọn A

Sử dụng tính chất: Hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên TXĐ khi $a > 1$ nên đáp án A đúng

Ví dụ 3: Cho bốn hàm số sau: $y = f(x) = \ln x$; $y = g(x) = \sqrt{2x^2 + 4}$;

$y = h(x) = \left(\frac{2017}{2018}\right)^x$; $y = l(x) = \ln(x^2 + 1)$. Có bao nhiêu hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Giải

Chọn C

Sử dụng tính chất: Hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên TXĐ khi $a > 1$ nên $y = f(x) = \ln x$ (Nhận)

Sử dụng tính chất: Hàm số $y = a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $0 < a < 1$ nên

$y = h(x) = \left(\frac{2017}{2018}\right)^x$ (Loại)

Hàm số $y = g(x) = \sqrt{2x^2 + 4}$ xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$ và $y' = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 4}} > 0$ với $\forall x > 0$

(Nhận)

Hàm số $y = l(x) = \ln(x^2 + 1)$ xác định với $\forall x \in R$ và $y' = \frac{2x}{x^2 + 1} > 0$ với $\forall x > 0$

(Nhận)

Ví dụ 4: Cho hàm số sau: $y = f(x) = (x^2 - 2(m+4)x + 2m+12).e^x$. Tìm tổng các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên TXĐ là S thì giá trị của S sẽ là:

A. 15

B. -12

C. -15

D. -10

Giải

Chọn C

+) TXĐ $D = R$

+) Ta có $f'(x) = (x^2 - 2(m+3)x + 4).e^x$.

Hàm số nghịch biến trên TXĐ khi $x^2 - 2(m+3)x + 4 \leq 0; \forall x \in R$

$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq -1$. Đáp án C